

ЛЕКЦИЯ № 13

Влияние диссипации на параметрический резонанс.

Из-за громоздкости исследования параметрического резонанса при учете трения, рассмотрим вначале такой резонанс без затухания, но в более простой модели. Удобно записать уравнение параметрического резонанса (12.2) в терминах введенной в (10.7) комплексной переменной $\psi = \bar{\phi} = \dot{x} - i\omega_0 x$. Оно примет вид

$$i\dot{\psi} - \omega_0\psi - \frac{\omega_0 h}{4}\bar{\psi}e^{-i\omega t} = \frac{\omega_0 h}{4}(\bar{\psi}e^{i\omega t} - \psi e^{i\omega t} - \psi e^{-i\omega t}). \quad (13.1)$$

В левую часть включено *резонансное* слагаемое $\sim \exp(-i\omega t)$, такое что функция $\exp(-i\omega t/2)$ является решением левой части уравнения. (Если в левую часть перенести только слагаемое $\sim \exp(i\omega t)$, то решением будет функция $\exp(i\omega t/2)$). Если отбросить все слагаемые правой части, то это будет соответствовать рассмотренному ранее *резонансному приближению*. Ниже уравнение этого приближения

$$i\dot{\psi} - \omega_0\psi - \frac{\omega_0 h}{4}\bar{\psi}e^{-i\omega t} = 0 \quad (13.2)$$

будем рассматривать в качестве модельной системы для качественного описания ряда явлений. Подставляя в него решение в виде $\psi = A\exp(-i\omega t/2)$, получаем

$$(\omega - 2\omega_0)A - \omega_0 h\bar{A} = 0. \quad (13.3)$$

Поскольку коэффициенты этого уравнения вещественны, то решение может быть либо вещественным, либо чисто мнимым. В этих двух случаях мы получаем

$$\omega_{\pm} = 2\omega_0 \pm 2\omega_0 h, \quad (13.4)$$

что совпадает с приближенным решением (12.5). Но это соотношение в рамках уравнения (13.2) является точным, справедливым при любых амплитудах воздействия. Кроме того, в предложенной модели отсутствуют резонансы высших порядков. Зависимости (13.4) приведены на Рис.13.1.

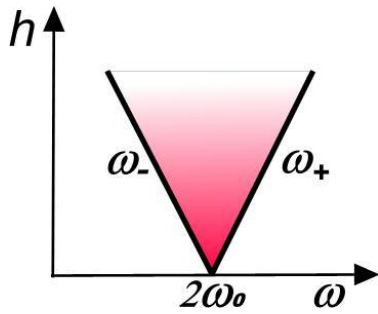


Рис.13.1

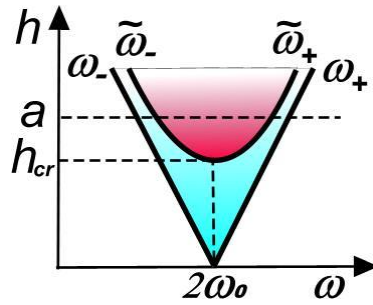


Рис.13.2

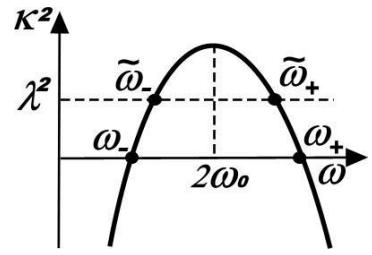


Рис.13.3

Легко находятся и решения общего вида. Полагая амплитуду A в решении зависящим от времени, получаем вместо (13.3) уравнение

$$i\dot{A} + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_0\right)A - \frac{\omega_0 h}{4} \bar{A} = 0 \quad (13.5)$$

или для $A = R + iI$:

$$-2\dot{I} + (\omega - \omega_+)R = 0, \quad 2\dot{R} + (\omega - \omega_-)I = 0. \quad (13.6)$$

(Заметим, что это – точное уравнение, не связанное с отбрасыванием высших временных производных, как в уравнениях (12.20, 12.21)). Подставляя решения в виде $R = R_0 \exp(\kappa t)$ и $I = I_0 \exp(\kappa t)$, получаем для параметра κ выражение

$$\kappa^2 = (\omega_+ - \omega)(\omega - \omega_-)/4. \quad (13.7)$$

Таким образом, в области между линиями для стационарных колебаний $\omega = \omega_{\pm}(h)$ (заштрихована на Рис.13.1) решение модуляционно неустойчиво и экспоненциально нарастает со временем с инкрементом $\Gamma = \sqrt{(\omega_+ - \omega)(\omega - \omega_-)}/2$. В области вне заштрихованной на Рис.13.1, т.е. при $\omega < \omega_-$ и $\omega > \omega_+$ решение является двухчастотным с частотами

$$\nu_{1,2}(\omega, h) = \left(\omega \pm \sqrt{(\omega - \omega_-)(\omega - \omega_+)}\right). \quad (13.8)$$

Все полученные в рамках предложенной упрощенной модели результаты качественно совпадают с полученными ранее для уравнения (12.2) осциллятора. Поэтому в рамках такой упрощенной модели рассмотрим влияние затухания на параметрический резонанс. Как было показано в лекции №11, затухание может быть учтено заменой в комплексном уравнении динамики собственной частоты $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i\lambda$, где λ – коэффициент трения. При этом уравнение (13.2) преобразуется к виду

$$i\dot{\psi} - (\omega_0 - i\lambda)\psi - \frac{\omega_0 h}{4}\bar{\psi} e^{-i\omega t} = 0. \quad (13.9)$$

Представляя одночастотное стационарное решение в виде $\psi = A \exp(i\omega t/2)$, после подстановки в (13.9) получаем

$$\left(\frac{\omega}{2} - \omega_0 + i\lambda\right)A - \frac{\omega_0 h}{4}\bar{A} = 0. \quad (13.10)$$

После подстановки решения в виде $A = R + iI$ или $\psi = R_0 \exp(-i\omega t/2) + iI_0 \exp(-i\omega t/2)$ и приравнивания нулю вещественной и мнимой частей, равенство нулю детерминанта системы уравнений дает зависимость частоты от глубины модуляции таких стационарных колебаний:

$$\tilde{\omega}_{\pm} = 2\omega_0 \pm \frac{\omega_0 h}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{4\lambda}{\omega_0 h}\right)^2} \quad \text{или} \quad h = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{(\tilde{\omega} - 2\omega_0)^2 + 4\lambda^2}. \quad (13.11)$$

Эта зависимость изображена на Рис.13.2. Их можно переписать еще в следующем простом виде: $(\omega_+ - \tilde{\omega})(\tilde{\omega} - \omega_-) = 4\lambda^2$ или $\kappa^2(\tilde{\omega}) = \lambda^2$. Видно, что при учете затухания появляется критическое значение амплитуды внешнего воздействия $h_{cr} = 4\lambda/\omega_0$, при котором возникают одночастотные стационарные решения. При возрастании h зависимости $h(\omega)$ стремятся к полученным ранее зависимостям (13.4). Полная картина динамики осциллятора при параметрическом возбуждении и учете затухания сложнее.

Учтем зависимость амплитуды $A = R + iI$ от времени и получим уравнение для функции A

$$i\dot{A} + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_0 + i\lambda\right)A - \frac{\omega_0 h}{4}\bar{A} = 0, \quad (13.12)$$

или для ее вещественной части R :

$$\ddot{R} + 2\lambda R^2 + (\lambda^2 - \kappa^2)R = 0 \quad (13.13)$$

с величиной κ из (13.7). Таким образом, показатель временной зависимости решения $R = R_0 \exp(st)$ равен

$$s = -\lambda \pm \sqrt{\kappa^2} = -\lambda \pm \sqrt{(\omega - \omega_-)(\omega_+ - \omega)}/2. \quad (13.14)$$

Из этого выражения видно, что в области величин поля h выше линии $\tilde{\omega}_{\pm}$ (заштриховано красным на Рис.13.2), в которой $\kappa > \lambda$, одна из экспонент нарастает со временем: $\psi \sim \exp(-i\omega t/2 + \Gamma t)$, где $\Gamma = \kappa - \lambda$. Таким образом, учет

затухания не ограничивает экспоненциальное нарастание амплитуды. Второе решение убывает как $\exp(-i\omega t/2 - \Gamma_2 t)$ с $\Gamma_2 = -\kappa - \lambda$. Первая экспонента обеспечивает параметрическую неустойчивость возбуждения. На линии $\tilde{\omega}_\pm$ одно значение показателя s обращается в нуль, и это решение соответствует рассмотренному выше одночастотному стационарному состоянию $\psi \sim \exp(i\tilde{\omega}t/2)$, которое обсуждалось выше. Но второе решение экспоненциально затухает $\sim \exp(i\tilde{\omega}t/2 - 2\lambda t)$. В области параметров между линиями $\tilde{\omega}_\pm$ и $\omega_\pm$ (заштриховано голубым на Рис.13.2) оба решения экспоненциально затухают, осциллируя с частотой $\omega/2$. Наконец, вне этих областей, где $\kappa^2 = -\Omega^2 < 0$, решение остается затухающим с общим декрементом $\Gamma = -\lambda$, но при этом – двухчастотным: $\psi \sim \exp(-\lambda t + (-\omega/2 \pm \Omega)t)$. Зависимость параметра κ^2 от частоты ω при фиксированной амплитуде поля (линия a на Рис.13.2) изображена на Рис.13.3. Для сравнения обычного и параметрического резонансов изобразим для второго зависимость амплитуды от частоты при фиксированной амплитуде внешнего воздействия h (Рис.13.4).

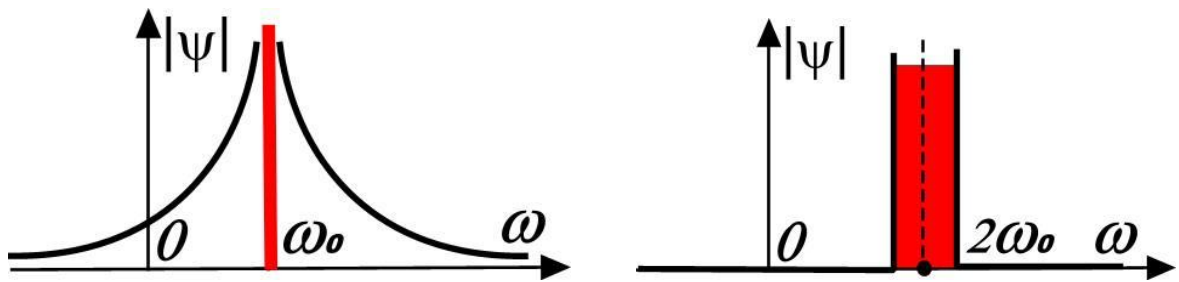


Рис.13.4

Красным выделены области неустойчивости: при обычном резонансе это – одна частота с линейным ростом, а при параметрическом – полоса частот с экспоненциальным нарастанием вблизи $2\omega_0$.

В заключение рассмотрим условие применимости резонансного приближения, в котором из уравнения колебания осциллятора было получено эффективное уравнение (13.2). Учтем малые добавки к решению нулевого приближения $\psi = A \exp(-i\omega t/2) + u$ и получим для величины u уравнение

$$i\ddot{u} - \omega_0 u - \frac{\omega_0 h}{4} \bar{u} e^{-i\omega t} = \frac{\omega_0 h}{4} (\bar{A} e^{i\omega t/2} - A e^{i\omega t/2} - A e^{-3i\omega t/2}). \quad (13.15)$$

Все «силы» в правой части являются нерезонансными и действуют независимо. Поэтому можно рассмотреть воздействие каждого слагаемого в правой части независимо. Например, рассмотрим второе слагаемое:

$$i\ddot{u} - \omega_0 u - \frac{\omega_0 h}{4} \bar{u} e^{-i\omega t} = -A \frac{\omega_0 h}{4} e^{i\omega t/2}. \quad (13.16)$$

Учитывая вид правой части, можно искать решение для u в основном приближении в виде $u = a \exp(i\omega t/2)$. Но при этом третье слагаемое в левой части требует добавок, пропорциональных $\exp(-i3\omega t/2)$. Таким образом, подставляя в (13.16) решение в виде $u = a \exp(i\omega t/2) + b \exp(-i3\omega t/2)$, получаем:

$$\left(-a \left(\omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) + A \frac{\omega_0 h}{4} - b \frac{\omega_0 h}{4} \right) e^{i\omega t/2} + \left(b \left(\frac{3\omega}{2} - \omega_0 \right) - a \frac{\omega_0 h}{4} \right) e^{-i3\omega t/2} = 0. \quad (13.17)$$

Зануляя коэффициенты при разных гармониках, находим, что $a \sim hA$ и $b \sim h^2 A$. Поскольку нас интересуют колебания при частотах, близких к величине $2\omega_0$, то приближенное решение имеет вид

$$\psi \approx A \left(e^{-i\omega t/2} + \frac{h}{8} e^{i\omega t/2} + \frac{h^2}{16} e^{-3i\omega t/2} + \dots \right). \quad (13.18)$$

При слабом воздействии с $h \ll 1$ решение предложенной модельной системы приближенно определяет решение исходной задачи. (Заметим, что при параметрическом воздействии общая амплитуда A не определена. Т.е. всегда есть решение $A = 0$. Чтобы параметрически раскачать осциллятор, необходимо в начальный момент сообщить ему конечную амплитуду).